Egzamin z Algebry II – 2023

Proszę umieścić rozwiązania poszczególnych zadań na oddzielnych, podpisanych kartkach. Każde zadanie ma wartość 20 punktów.

1. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem. Wykazać, że istnieje skończenie wiele parami nieizomorficznych $\mathbb{F}[X]$-modułów, które są jednowymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad $\mathbb{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciało $\mathbb{F}$ jest skończone.

2. Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Dla dowolnego R-modułu M rozważmy podzbiór pierścienia R, zwany anihilatorem M, określony wzorem

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R : rm = 0 \text{ dla wszystkich } m \in M\}.$$

a) Wykazać, że $\mathrm{Ann}_R(M)$ jest ideałem pierścienia R.

b) Wykazać, że jeśli niezerowy R-moduł M jest wolny, to $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$.

c) Rozstrzygnąć, czy zachodzi wynikanie przeciwne do tego z punktu b).

3. Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Niezerowy R-moduł M nazywamy prostym, jeśli ma dokładnie dwa podmoduły: 0 oraz M.

a) Niech M będzie niezerowym R-modułem. Wykazać, że jeśli dla dowolnego $0 \neq m \in M$ zachodzi równość $Rm = M$, to R-moduł M jest prosty.

b) Zbadać, dla których pierścieni R przemiennych z 1 każdy R-moduł wolny rangi 1 jest prosty.

c) Opisać wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, $\mathbb{C}[X]$-moduły proste, gdzie $\mathbb{C}$ oznacza ciało liczb zespolonych.

4. Zbadać, czy grupa zadana prezentacją

$$\Gamma = \langle x, y \,|\, yxy^{-1} = x^2 \rangle$$

a) jest przemienna;

b) jest skończona.

5. Wykazać, że jeśli liczba zespolona z jest konstruowalna nad ciałem $\mathbb{Q}$, to także liczby $\mathrm{Re}(z)$ oraz $\mathrm{Im}(z)$ są konstruowalne nad $\mathbb{Q}$.

6. Wykazać, że pierwiastki równania

$$X^5 - 80X - 15 = 0$$

nie wyrażają się przez pierwiastniki nad ciałem $\mathbb{Q}$.